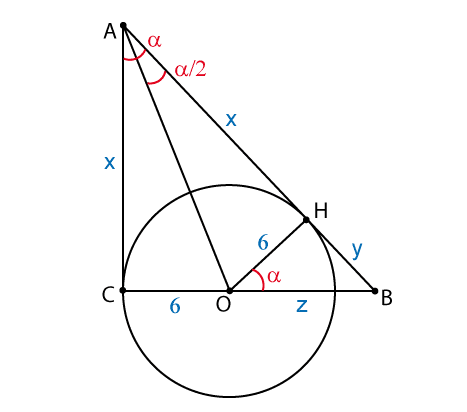
Математика ЕГЭ задание 16.

Условие:

Прямоугольный треугольник ABC имеет периметр 54.  
Окружность радиуса 6, центр которой лежит на катете ВС, касается прямых АВ и АС.  
Найти площадь треугольника АВС.

Решение:



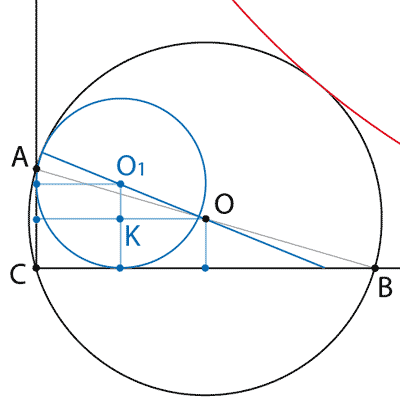
Пусть AC = AH = x, BH = y, BO = z.  
Тогда периметр треугольника равен 2x+y+z+6 = 54.  
  
Выразим x, y и z через угол альфа (а):  
  
Из прямоугольного треугольника AHO:  
x = 6/tg(a/2).  
Из прямоугольного треугольника BHO:  
y = 6 tg(a), z = 6/cos(a)  
  
Итак, выражение для периметра становится таким:  
  
12/tg(a/2)+6 tg(a)+6/cos(a)+6 = 54  
1/cos(a) + 2/tg(a/2) + tg(a) = 8.  
  
Тут удобно всё выразить через тангенс половинного угла:  
(1+(tg(a/2))2)/(1-(tg(a/2))2) + 2/tg(a/2) + 2 tg(a/2)/(1-(tg(a/2))2) = 8.  
  
Обозначим t = tg(a/2), получим  
(1+t2)/(1-t2)+2/t+2t/(1-t2) = 8  
  
Путём несложных преобразований приводим это к виду  
9t2 - 9t + 2 = 0  
  
(1) t1 = 1/3  
(2) t2 = 2/3  
  
Выражаем обратно x и z (y нам в принципе уже не нужен, поскольку площадь треугольника будет равна половине произведения катетов, т.е. x (z+6)/2. Хотя и y тоже по хорошему стоит вычислить и проверить, получается ли периметр равным 54).  
  
Итак, для случая (1) имеем:  
z = 6/cos(a) = 6/((1-1/9)/(1+1/9)) = 7.5  
x = 6/tg(a/2) = 6/(1/3) = 18.  
S = x (z+6)/2 = 121.5  
  
Для случая (2) имеем:  
z = 6/cos(a) = 6/((1-4/9)/(1+4/9)) = 15.6  
x = 6/tg(a/2) = 6/(2/3) = 9.  
S = x (z+6)/2 = 97.2

Ответ:

121.5, 97.2

Математика ЕГЭ задание 16.

Окружность S проходит через вершину C прямого угла и пересекает его стороны в точках, удаленных от вершины C на расстояние 14 и 48. Найти радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S.   
  
Решение:  
  
Во-первых, заметим, что, как и обычно бывает в C4, тут может быть два случая - вторая окружность может касаться первой как изнутри (синие линии на рисунке), так и снаружи (красная линия).



Итак, AC = 14, BC = 48, угол C - прямой. Значит, AB является диаметром первой окружности, и он равен sqrt(142+482) = 50.  
Точка O, являясь центром окружности, делит AB пополам. Значит, перпендикуляры, опущенные из неё к отрезкам AC и BC, тоже делят их пополам.  
  
Пусть O1 - центр второй окружности, а R - её радиус. Рассмотрим прямоугольный треугольник OKO1 с гипотенузой OO1 и катетами, параллельными лучам угла.  
  
В "синем" случае:  
OK = 24 - R  
O1K = R - 7  
OO1 = 25 - R  
  
Пишем теорему Пифагора:  
(24 - R)2 + (R - 7)2 = (25 - R)2   
Решаем, получаем два корня - 0 и 12. Нулевой случай нас не сильно интересует.  
  
В "красном" случае всё то же самое, только OK = R - 24 и, что самое важное, OO1 = 25 + R.  
И там, решая такое же уравнение, получим второй корень 112.  
  
Ответ:      12, 112