Математика ЕГЭ задание 16.

Условие:

Прямоугольный треугольник ABC имеет периметр 54.
Окружность радиуса 6, центр которой лежит на катете ВС, касается прямых АВ и АС.
Найти площадь треугольника АВС.

Решение:



Пусть AC = AH = x, BH = y, BO = z.
Тогда периметр треугольника равен 2x+y+z+6 = 54.

Выразим x, y и z через угол альфа (а):

Из прямоугольного треугольника AHO:
x = 6/tg(a/2).
Из прямоугольного треугольника BHO:
y = 6 tg(a), z = 6/cos(a)

Итак, выражение для периметра становится таким:

12/tg(a/2)+6 tg(a)+6/cos(a)+6 = 54
1/cos(a) + 2/tg(a/2) + tg(a) = 8.

Тут удобно всё выразить через тангенс половинного угла:
(1+(tg(a/2))2)/(1-(tg(a/2))2) + 2/tg(a/2) + 2 tg(a/2)/(1-(tg(a/2))2) = 8.

Обозначим t = tg(a/2), получим
(1+t2)/(1-t2)+2/t+2t/(1-t2) = 8

Путём несложных преобразований приводим это к виду
9t2 - 9t + 2 = 0

(1) t1 = 1/3
(2) t2 = 2/3

Выражаем обратно x и z (y нам в принципе уже не нужен, поскольку площадь треугольника будет равна половине произведения катетов, т.е. x (z+6)/2. Хотя и y тоже по хорошему стоит вычислить и проверить, получается ли периметр равным 54).

Итак, для случая (1) имеем:
z = 6/cos(a) = 6/((1-1/9)/(1+1/9)) = 7.5
x = 6/tg(a/2) = 6/(1/3) = 18.
S = x (z+6)/2 = 121.5

Для случая (2) имеем:
z = 6/cos(a) = 6/((1-4/9)/(1+4/9)) = 15.6
x = 6/tg(a/2) = 6/(2/3) = 9.
S = x (z+6)/2 = 97.2

Ответ:

121.5, 97.2

Математика ЕГЭ задание 16.

Окружность S проходит через вершину C прямого угла и пересекает его стороны в точках, удаленных от вершины C на расстояние 14 и 48. Найти радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S.

Решение:

Во-первых, заметим, что, как и обычно бывает в C4, тут может быть два случая - вторая окружность может касаться первой как изнутри (синие линии на рисунке), так и снаружи (красная линия).



Итак, AC = 14, BC = 48, угол C - прямой. Значит, AB является диаметром первой окружности, и он равен sqrt(142+482) = 50.
Точка O, являясь центром окружности, делит AB пополам. Значит, перпендикуляры, опущенные из неё к отрезкам AC и BC, тоже делят их пополам.

Пусть O1 - центр второй окружности, а R - её радиус. Рассмотрим прямоугольный треугольник OKO1 с гипотенузой OO1 и катетами, параллельными лучам угла.

В "синем" случае:
OK = 24 - R
O1K = R - 7
OO1 = 25 - R

Пишем теорему Пифагора:
(24 - R)2 + (R - 7)2 = (25 - R)2
Решаем, получаем два корня - 0 и 12. Нулевой случай нас не сильно интересует.

В "красном" случае всё то же самое, только OK = R - 24 и, что самое важное, OO1 = 25 + R.
И там, решая такое же уравнение, получим второй корень 112.

Ответ:      12, 112